
DM n°2 (non noté)

Pour la rentrée des vacances de Février

Exercice 1

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver, en fonction de I_3 et A , deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A$$

puis expliciter les coefficients de P_1 et P_2 .

2. (a) Calculer les matrices P_1^2 , P_1P_2 , P_2P_1 et P_2^2 .

(b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de généraliser la formule pour les séries géométriques dérivées en déterminant la valeur de la somme $\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1)x^{n-r}$ pour tout entier naturel r et tout réel x de l'intervalle $] -1; 1[$.

Dans tout l'exercice, x désigne un réel de l'intervalle $] -1; 1[$.

1. Soit r un entier naturel fixé

(a) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$ on a : $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

(b) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2}x^n$

(c) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r}x^n$ est convergente.

2. (a) Pour tout entier naturel r , on pose : $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}x^n$. Donner la valeur de S_0 .

(b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$

(c) En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

(d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1)x^{n-r}$ en fonction de x et de r .